www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours d'entrée à l'Ecole des Ingénieurs de la Ville de Paris ouvert le 18 avril 1989

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
(durée 2 H - Coefficient 2)
Le sujet comporte deux pages

L'objet du problème est l'étude de l'équation différentielle du premier ordre $y'=x+y^2$ (E).

On appelle courbe intégrale, toute courbe (C) admettant une représentation cartésienne du type $y=f(x)$ où f est une fonction définie sur un intervalle, solution de l'équation différentielle (E).

Dans la première partie on étudie quelques propriétés générales des courbes intégrales. La deuxième partie traite l'étude d'une solution particulière.

Question préliminaire

a et b désignant 2 réels tels que $a<b$, soit g une fonction de classe C^1 de $[a,b]$ dans R vérifiant les 2 propriétés suivantes:
$\begin{cases}\exists c \in]a,b[\text{ tel que pour tout } x \text{ de }]a,c[\text{ on a } g(x)>0.\\ \forall x \in [a,b] \quad g(x)\geqslant 0 \Rightarrow g'(x)\geqslant 0.\end{cases}$
On veut montrer que g est strictement positive sur $]a,b]$.
On suppose pour cela l'existence d'un réel $e \in]a,b]$ tel que $g(e)\leqslant 0$.

a) Montrer qu'il existe un réel $d \in]a,b]$ vérifiant $\begin{cases}g(d)=0\\ \forall x \in]a,d[\quad g(x)>0.\end{cases}$

b) Quel est le signe de $g'(x)$ pour x appartenant à $]a,d[$.

c) En déduire que $\forall x \in]a,b] \quad g(x)>0$.

Ière Partie

1) Soit f une solution de l'équation différentielle (E) $y'=x+y^2$ définie sur un intervalle I. Vérifier que f est de classe C^∞ sur I.

2) Vérifier que les points des courbes intégrales de (E) à tangente horizontale appartiennent à une parabole (P) dont on donnera l'équation.

3) Vérifier que les points d'inflexion des courbes intégrales appartiennent à une courbe (I) admettant une représentation cartésienne du type $x=g(y)$.

4) Représenter sur un même dessin les courbes (P) et (I). On étudiera la position respective des 2 courbes l'une par rapport à l'autre.

5) On suppose l'existence d'une solution f de (E) définie sur un intervalle du type $[a,+\infty[$.
a) Quels sont les limites de $f'(x)$ et de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) En déduire l'existence d'un réel b supérieur à $\sup(a,1)$ tel que $f(b)>0$.

c) On considère la fonction h définie sur $[b,b+\frac{\pi}{2}[$ par $h(x)=f(x)-\tan(x-b)$. Vérifier que $h(x)\geqslant 0 \Rightarrow h'(x)\geqslant 0$. En déduire que h est positive sur $[b,b+\frac{\pi}{2}[$. Qu'en déduit-on pour f?

6) On suppose pour cette question l'existence d'une solution f définie sur un intervalle du type $[a,b[$ où $a<b<+\infty$, et telle que $f(x)$ n'admette pas de limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures.
A partir de l'expression $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$, montrer que $\int_a^b (f(t))^2 dt$ diverge. En déduire que $f(x) \xrightarrow[x \to b_-]{} +\infty$.

TSVP

IIème Partie

On suppose dans cette partie l'existence d'une solution de (E) définie sur [0,1] et vérifiant f(0)=0.

1) Utiliser la méthode d'Euler pour résoudre de façon approchée l'équation différentielle $y'=x+y^2$ sur [0,1] en découpant l'intervalle en dix segments égaux et en prenant pour valeur initiale f(0)=0. Donner la valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de f(1) qui en résulte.

2) On se propose de vérifier l'inégalité :
$\forall x \in [0,1]\ f(x) \leqslant tg(x)$. (1)
On considère pour cela la fonction h définie par $h(x)=tg(x)-f(x)$.

a) Donner les valeurs de h(0) et de h'(0).

b) Vérifier que $\forall x \in [0,1[\ tg(x) \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$.
En déduire que si $x \in [0,1[$ et $h(x) \geqslant 0$, alors $h'(x) \geqslant 0$.

c) Conclure.

3) a) Soit n un entier naturel. Exprimer $f^{(n+1)}$ en fonction de $x, f, f', f'', \ldots f^{(n)}$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n la fonction $f^{(n)}$ est positive sur [0,1].
On pose alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et on admet que $f(x)=\sum_0^{\infty} a_n x^n$ sur [0,1].

c) Donner l'expression de a_{n+1} en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

d) Donner la valeur exacte de a_n pour $n<11$. (On mettra a_n sous la forme d'une fraction irréductible.)

e) En déduire une minoration de f(x). Donner la minoration de f(1) à 10^{-4} près correspondante.

4) Dans cette question on se propose de trouver une majoration de f sur [0,1] plus fine que la majoration (1) trouvée à la question 2.

a) A partir de la majoration valable sur [0,1] $f(x) \leqslant tg(x)$ et de l'égalité $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$, donner une majoration du type :
$\forall x \in [0,1]\ f(x) \leqslant ax+bx^2+ctg(x)$ (2) où a,b,c sont trois réels.
Donner la majoration à 10^{-4} près de f(1) correspondante.

b) Vérifier que $\forall x \in [0,1]\ tg(x) \leqslant x+(tg(1)-1)x^3$. En déduire une majoration de f(x) du type $f(x) \leqslant cx^2+dx^3$. (3)

c) En utilisant la même méthode que celle employée à la question 4a), trouver une majoration du type $f(x) \leqslant ex^2+gx^5+hx^6$ (On utilisera $\forall p>6$ et $\forall x \in [0,1]\ x^p \leqslant x^6$).
Donner les valeurs exactes de e et de g et la valeur approchée par excès à 10^{-4} près de h. On note (4) cette majoration. Donner la majoration de f(1) correspondante.

d) Réitérer le procédé afin d'obtenir une majoration du type:
$f(x) \leqslant ix^2+jx^5+kx^8+lx^9$. (5)
Donner les valeurs exactes de i, j et k et la valeur approchée par excès à 10^{-4} près de l. Donner la majoration de f(1) correspondante.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail